(极简物理) 力学上册介绍

十年一线教学

百位名师指点

千册教辅精髓

万题回味反思

分册安排：本系列书籍共计六册，力学上下册，电磁学上下册，选修两册，配套新教材！

难度编写：与高考持平或略高于高考。

部分章节涉及简单积分，并不要求大家都学会，只为说明该知识点的正确性，

同时给大家高屋建瓴的感受。

适用对象：全部高中生，即使想走强基计划也可以将本书做为入门书籍。

全部高中教师，可作为教学蓝本，跨章节联系，建立思维超链接。

编写进度：由于是本人一人之力完成，进度略慢敬请谅解！

价格说明：书籍有价，知识无价，整理过程十分耗费精力，不议价，无优惠，不认可，勿打扰。

电子版不出！ 电子版不出！ 电子版不出！ 电子版不出！

需要购买的朋友，添加微信：15526897395 转账 留下地址电话姓名即可发货！

备注：书籍中无水印！

110 元一册，包邮，新疆西藏另议！

声明：极简物理一书中的“简”并非“简单”的意思，所以读者在阅读过程中可能会产生一种错觉：作者有意将问题复杂化！正所谓：台上十分钟，台下十年功。做事讲究方法策略技巧，考试自然也追求效率，我们只有知道哪些方法可行，哪些方法不可行；哪些解法繁琐，哪些解法简洁，才可以在考试中节省时间，才可以真正做到“简”！

目录

附录：

2. 竖直上抛运动规律

速度公式：$v_t = v_0 - gt$　　位移公式：$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$　　速度—位移公式：$v_t^2 - v_0^2 = 2gh$

上升最大高度：$h = \frac{v_t^2}{2g}$　　上升最大高度用时：$t = \frac{v_0}{g}$

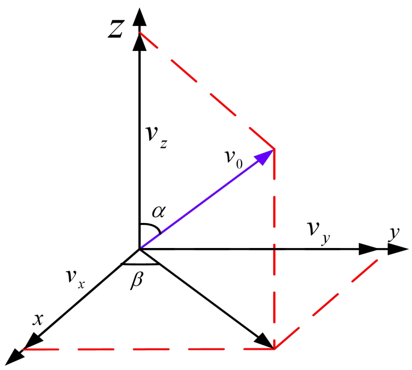
【物理思维】　　**转换法巧解多体运动**

(1)多体转化为单体：多物体在空间上重复相同运动时，可用一个物体不同的时刻的运动取代空间多个物体的运动．

(2)将连续多质点转化为单一质点：具有较大的线度或体积的物体平动问题可转化为物体上某一点的运动．如火车车通过路标的过程，可转化为火车上某一点(质点)通过与火车等长的位移所经历的时间．换言之：“盯住一个点”

3.5 多体抛射包络

由同一点以相同速度同时向每一个方向抛射出一个质点，若不计空气阻力，则在任一相同时刻，这些质点处于同一球面。



证明：如图在原点抛射质点，进行速度分解，因重力加速度在竖直方向，对水平面速度无影响，所以小球在 xy 两个方向上做匀速直线。

t 时刻小球空间位置坐标：$x_0 = v_0 t\sin\alpha\cos\beta$　　$y_0 = v_0 t\sin\alpha\sin\beta$　　$z_0 = v_0 t\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

整理得：$x_0^2 + y_0^2 + (z_0^2 + \frac{1}{2}gt^2) = (v_0 t)^2$

可知在任一时刻，空中这些小球都在球心为（0,0，$-\frac{1}{2}gt^2$），半径为 $v_0 t$ 的同一球面上。如选择自由落体为参考系，则质点的运动将转化为不同方向的匀速直线运动，很容易得出结论：包络面为球面。生活中的喷泉以及烟花都可以看作球面的近似。

例 1、(抛体对称性)一小球以速度 v_0 竖直上抛，t_1 时刻到达高度 H 处(非最高点)，t_2 时刻再次回到高度 H 处，重力加速度为 g，下列说法不正确的是（ D ）

A. $t_1+t_2=\dfrac{2v_0}{g}$　　B. $t_1\times t_2=\dfrac{2H}{g}$　　C. $\dfrac{t_1+t_2}{2}>\sqrt{t_1t_2}$　　D. $t_1\times t_2=\dfrac{v_0^2}{g}$

解：根据题意可知 t_1 和 t_2 为方程：$H=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ 的两个根。

根据韦达定理可知：$t_1+t_2=\dfrac{2v_0}{g}$　$t_1\times t_2=\dfrac{2H}{g}$

补充：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$　$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$　$H=\dfrac{v_0t_1t_2}{t_1+t_2}$　$H=\dfrac{gt_1t_2}{2}$　$H=\dfrac{g^2}{4v_0}t_1t_2(t_1+t_2)$

例 2.(雨滴下落问题)雨滴在空中竖直下落时所受空气阻力与速度大小的二次方成正比，且不同质量的雨滴所受空气阻力与速度大小的二次方的比值相同。现有两滴质量分别为 m_1 和 m_2 的雨滴从空中竖直下落，在落到地面之前都已做匀速直线运动，则在雨滴做匀速直线运动的过程中，其重力功率之比为(C)

A. $m_1:m_2$　B. $\sqrt{m_1:m_2}$　C. $\sqrt{m_1^3:m_2^3}$　D. $\sqrt{m_2:m_1}$

解：匀速下落时，雨滴处于平衡状态：$mg=kv^2$ 可得：$v=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

则重力功率 $P=mgv=\sqrt{\dfrac{m^3g^3}{k}}$，即 $P\propto\sqrt{m^3}$ 可知 C 正确。

补充：

1. $f\propto v$，$mg-kv=ma$，雨滴做加速度减小的加速运动，当匀速时，$v=\dfrac{mg}{k}$。

2. $f\propto v^2$，$mg-kv^2=ma$，雨滴做加速度减小的加速运动，当匀速时，$v=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$。

例 3.（方程思想）一个物体从地面竖直上抛，t_1 时刻上升到距离地面 x_1 位置，t_2 时刻上升到距离地面 x_2 位置，物体继续上升至最高点后下落至 x_2 位置的时刻为 t_3，继续下落至 x_1 位置的时刻为 t_4，试证明：$g=\dfrac{8(x_2-x_1)}{(t_4-t_1)^2-(t_3-t_2)^2}$

解：物体上抛过程位移时间函数关系：$x=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

由题意可知：t_1 和 t_4 是 $x_1=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ 的两根

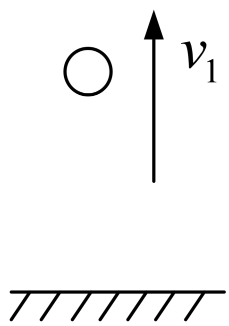
t_2 和 t_3 是 $x_2=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ 的两根

根据韦达定理：$t_1+t_4=\dfrac{2v_0}{g}$ $t_1\bullet t_4=\dfrac{2x_1}{g}$ 则有 $(t_4-t_1)^2=(t_4+t_1)^2-4t_4t_1=\dfrac{4v_0^2}{g}-\dfrac{8x_1}{g}$

同理可得：$(t_3-t_2)^2=(t_3+t_2)^2-4t_2t_3=\dfrac{4v_0^2}{g}-\dfrac{8x_2}{g}$

联立可得：$(t_4-t_1)^2-(t_3-t_2)^2=\dfrac{8(x_2-x_1)}{g}$ 整理可得：$g=\dfrac{8(x_2-x_1)}{(t_4-t_1)^2-(t_3-t_2)^2}$

例 4.从地面以大小为 v_1 的初速度竖直向上抛出一个皮球，经过时间 t 皮球落回地面，落地时皮球速度的大小为 v_2。已知皮球在运动过程中受到空气阻力的大小与速度的大小成正比，重力加速度大小为 g。t 的合理表达式应为（ ）



A．$t=\dfrac{v_1v_2}{g}$ B．$t=\dfrac{v_1+v_2}{g}$ C．$t=\dfrac{v_1-v_2}{g}$ D．$t=\dfrac{\sqrt{v_1v_2}}{g}$

解法 1.设上升过程平均摩擦力为 $\overline{f_1}$，下降过程平均摩擦力为 $\overline{f_2}$。

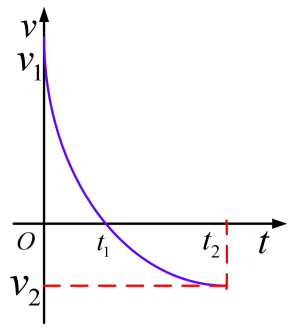
则 上升过程：$(mg+\overline{f_1})\ t_1=mv_1$ 下降过程：$(mg-\overline{f_2})\ t_2=mv_2$

整理可得：$mgt_1+k\overline{v_1}t_1=mv_1$ $mgt_2-k\overline{v_2}t_2=mv_2$

其中 $\overline{v_1}t_1=\overline{v_2}t_2=x$。两式相加即得：$mg(t_1+t_2)=m(v_1+v_2)$

解得：$t=\dfrac{v_1+v_2}{g}$

解法 2.



由题意可知：$f=kv$ 故：$\bar{f}t=k\bar{v}t=kx$

1.物体上升下落位移大小相同，动量抵消。

2.摩擦力一直阻碍运动，加速度趋于平衡。

3.整个过程 $\bar{f}t=k\bar{v}t=kx=0$

位移由起点指向终点，可确定动量方向，整个过程平均速度为 0。

4.类似于洛伦兹力：$f_{洛}=qvB=kv$

解法 3.上升过程：$mg+kv=ma=-m\frac{dv}{dt}$ （减速）

整理变形：$\frac{dv}{g+\frac{kv}{m}}=-dt$　积分：$\int_{v_1}^{0}\frac{dv}{g+\frac{kv}{m}}=\int_0^{t}-dt$

整理可得：$t_1=\frac{m}{k}\ln(\frac{mg+kv_1}{mg})$　$v=\frac{mg+kv_1}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$

同理下降过程：$t_2=\frac{m}{k}\ln(\frac{mg}{mg-kv_2})$　$v=\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$

$$t_{总}=t_1+t_2=\frac{m}{k}\ln(\frac{mg+kv_1}{mg})+\frac{m}{k}\ln(\frac{mg}{mg-kv_2})=\frac{m}{k}\ln(\frac{mg+kv_1}{mg-kv_2})$$

能量角度：上升过程

$$W_1=\int_0^{t_1}kv\bullet vdt=k\int_0^{t_1}(\frac{mg+kv_1}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k})^2dt=\frac{m^3g^2}{k^2}\ln(\frac{mg+kv_1}{mg})+\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{m^2gv_1}{k}$$

同理下降过程：

$$W_2=\int_0^{t_2}kv\bullet vdt=k\int_0^{t_2}(\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t})^2dt=\frac{m^3g^2}{k^2}\ln(\frac{mg}{mg-kv_2})+\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{m^2gv_2}{k}$$

整体动能定理：$-W_1-W_2=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

代入整理可得：$\frac{v_1+v_2}{g}=\frac{m}{k}\ln(\frac{mg+kv_1}{mg+kv_2})$　综合动量角度：$t=\frac{v_1+v_2}{g}$

第五讲 运动图像

5.1. 对运动图象的理解

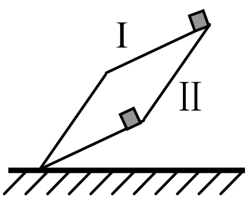
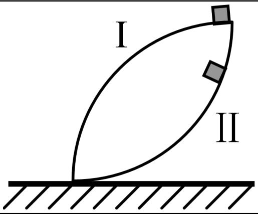
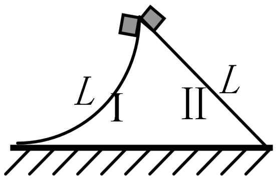
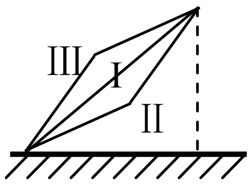
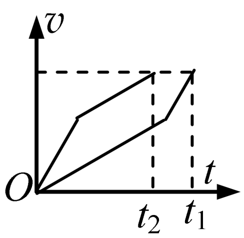
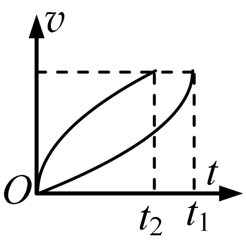
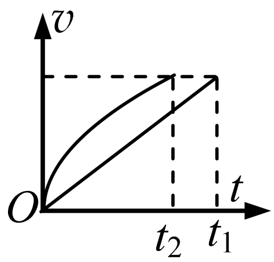
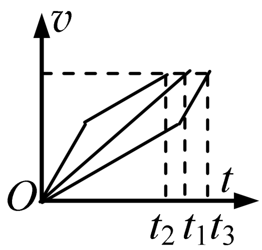
1.无论是$x-t$图象还是$v-t$图象都只能描述直线运动，<u>都不表示物体运动的轨迹。</u>

2.$x-t$图象和$v-t$图象的形状由函数关系决定。

5.2. “六看”运动图象

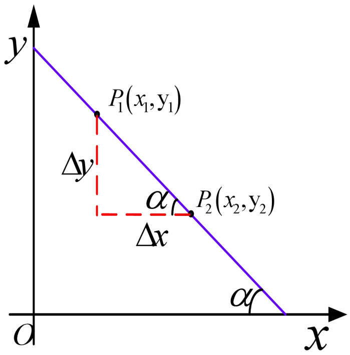
	$x-t$图象	$v-t$图象
轴	横轴为时间t，纵轴为位移x	横轴为时间t，纵轴为速度v。
线	倾斜直线表示匀速直线运动	倾斜直线表示匀变速直线运动
斜率	表示速度	表示加速度
面积	无实际意义	图线和时间轴围成的面积表示位移
纵截距	表示初位置	表示初速度
特殊点	拐点表示从一种运动变为另一种运动，交点表示相遇	拐点表示从一种运动变为另一种运动，交点表示速度相等

5.3 殊途同归时间比较

典型情景				
运动图像				

5.4.斜率

5.41.数学中斜率



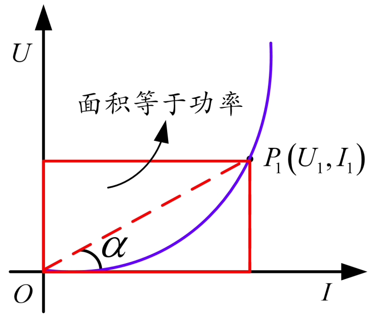
斜率也称“角系数”，衡量直线相对于横坐标轴的倾斜程度。一般采用直线对横轴的倾斜角α正切值来表示或通过两点坐标变化量的比值来表示，当横纵坐标标度相同时，两种表示方法相同。

数学中为研究曲线斜率随自变量的变化情况而引入导函数的工具，在解决物理问题时能够灵活采用导函数的方法可以事半功倍。如图，斜率$k=\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=f'(x)$

5.42.物理中斜率

物理中的斜率基本分为三类：与原点连线斜率、割线斜率、切线斜率。

1.与原点连线的斜率：横纵坐标比值，$k=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$。



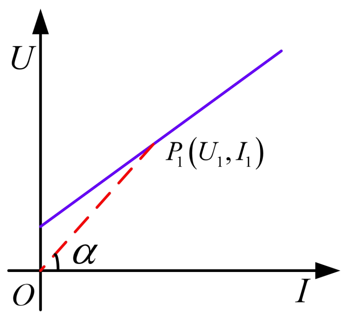
例 1.小灯泡伏安特性曲线。

电阻$R=\dfrac{U}{I}\neq\dfrac{\Delta U}{\Delta I}$，切线斜率无实际意义，采用与原点连线的斜率表示电阻。

注意：此时横纵坐标乘积具有意义代表功率。

补充：理想气体的$P-T$图上的点与原点连线的斜率$k=\dfrac{1}{V}$.

理想气体的$V-T$图上的点与原点连线斜率$k=\dfrac{1}{P}$.

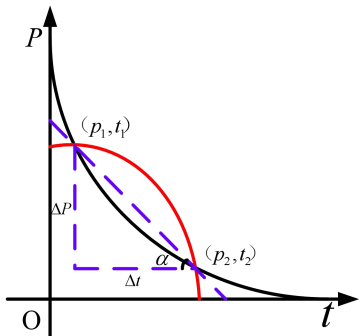


例 2.非线性原件伏安特性曲线。

根据电阻定义可知：$R=\dfrac{U}{I}\neq\dfrac{\Delta U}{\Delta I}$

2.割线斜率:纵横坐标变化量比值，$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 通常是某物理量平均值。

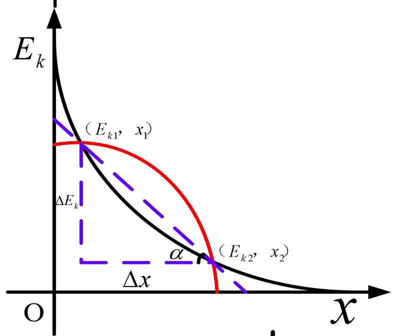
设 $\overline{A}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$，当 x 表示时刻，则 $\overline{A}$ 是对时间的平均；当 x 表示位置，则 $\overline{A}$ 是对距离的平均。故此时一定要指出物理量的平均值存在一个对什么物理量的平均值。



例 1.在 $P-t$ 图像中 $\overline{F_1}=\frac{\Delta p}{\Delta t}$ 表示合力对时间的平均值。

注意：（1）$\overline{F_1}$ 与图像形状无关系，只与两点坐标有关。

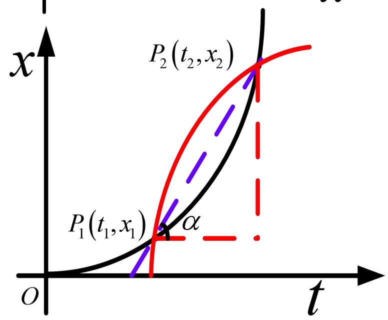
（2）此时图像与坐标轴围成面积正比于位移。



例 2.在 E_k-x 图像中 $\overline{F_2}=\frac{\Delta E_k}{\Delta x}$ 表示合力对位移的平均值。

注意：（1）$\overline{F_1}$ 与 $\overline{F_2}$ 一般情况下不等，故需区分对那个物理量的平均值。

（2）高中阶段不涉及系统动能定理，故在此不考虑保守力做功



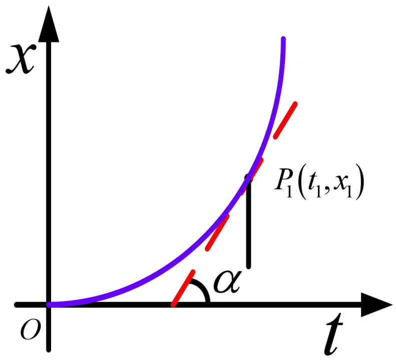
例 3.物体做匀变速直线运动 $x-t$ 图像，

割线代表该时段的平均速度

注意：（1）$x-t$ 图像准确的名字为：位置—时刻图像。

（2）初末位置相同，时间相同，则平均速度相同，（对时间的平均值）

3.切线斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ （一般可以理解为割线斜率的极限）



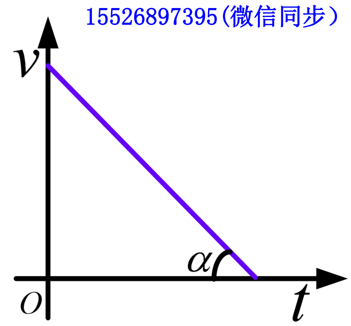
例 1.如图为物体做匀变速直线运动 $x-t$ 图像。

某点切线斜率即代表该点瞬时速度

注意：（1）因横纵坐标标度不一致，$k_p=\frac{\Delta x}{\Delta t}\neq\tan\alpha$

（2）根据导数的物理意义，$k_p=x'(\mathrm{t})=v_0+at$

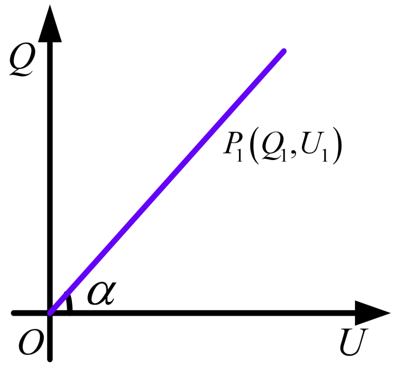
例 2.匀变速直线运动的 $v-t$ 图像，切线斜率代表加速度。



注意：（1）直线切线斜率：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=f'(\text{x})$

（2）加速度也可以理解为速度对时间的导函数。

例 3.电容充放电过程中电量与极板间电压关系图。



根据电容的定义可知：$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\Delta Q}{\Delta U}$

故切线斜率 $k=\dfrac{\Delta Q}{\Delta U}=C$

理解：Q 与 U 之间为正比例函数关系，从数学角度分析，其切线斜率和与原点连线斜率合二为一；从物理角度分析，电容具有函数值的比值定义和增量比值定义两种表述，故在此不必区分两种斜率的差异。

4.规律总结：

1.斜率是决定物理过程中，每个阶段图像的大致走势（增还是减，增减得越来越快还是越来越慢）的关键信息。图像斜率物理含义，需要根据物理公式来判定。

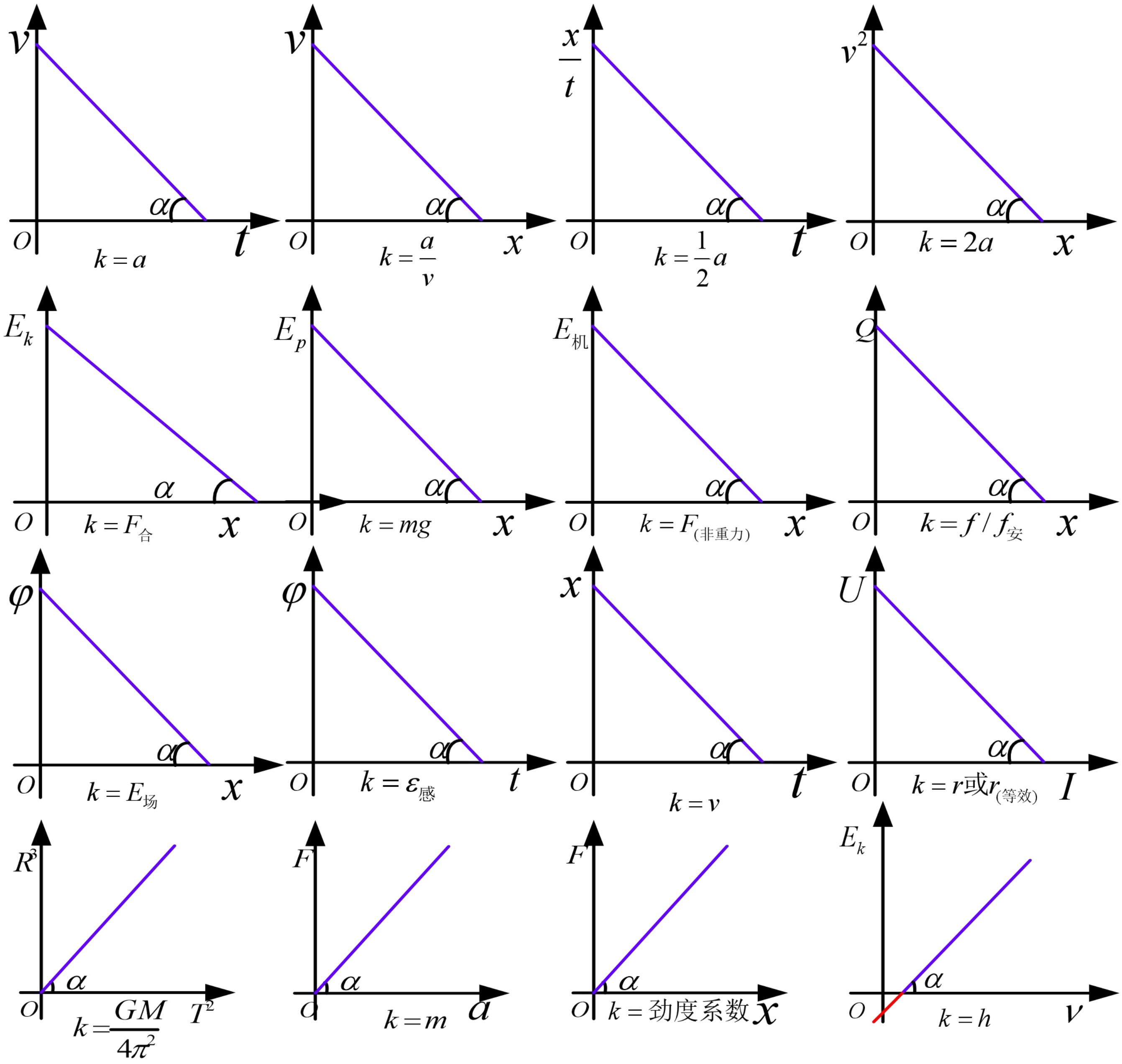
2.研究的物理量不具备随自变量积累的效应则采用连线斜率，且与坐标轴围成面积没有实际意义，但是横纵坐标乘积会有一定意义。

3.研究的物理量具备随自变量积累的效应则采用切线斜率，且与坐标轴围成面积有一定实际意义，但是横纵坐标乘积不一定具有物理意义。

4.物理函数图像中，纵横坐标的标度一般不统一，所以直线斜率并不一定等于直线倾角的正切值！但是直线斜率与倾角的正切值成正比。

5.5 斜率在物理中的应用

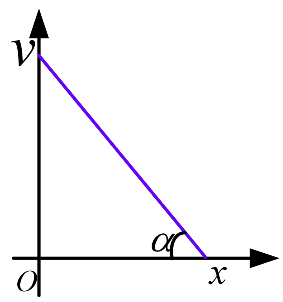
1. 常考切线斜率的物理意义归纳



2. 常用割线斜率例析

（1）在 $v-x$ 图中，割线斜率 $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\frac{\Delta v}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\dfrac{\bar{a}}{\bar{v}}$

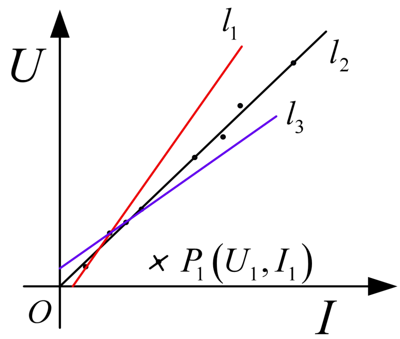
注意：不是匀变速运动，不可以用公式：$v^2=2ax$



（2）在v^2-x图中，$\frac{\Delta(v^2)}{\Delta x}=\frac{2}{m}\frac{(\frac{1}{2}mv^2)}{\Delta x}=\frac{2}{m}\frac{\Delta(E_k)}{\Delta x}=\frac{2}{m}\frac{W_{总}}{\Delta x}$，当物体沿$x$方向做直线运动时，令$\Delta x\to 0$得切线斜率为$2a$；此处需要说明的是，割线并不表示平均加速度；因为$\frac{W_{总}}{\Delta x}=\overline{F}$是力对距离的平均值，于是$\frac{\overline{F}}{m}$也应该是加速度对距离的平均值，并不是平均加速度；平均加速度$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$则是对时间的平均值。

（3）还有一些图像，虽然无法得到斜率的具体表达式，但是可以知道斜率与某个量成正比。如电磁感应，原线圈的电流，原磁场的磁感应强度，原磁场的磁通量等随t变化的图像，斜率就正比于感应电动势，进而也正比于感应电流，感应线圈输出电压等。

3.作图题注意事项



例.如图直线l_2代表了所描各点的平均位置，是线性回归方程的近似图像，值得注意的是所描的点可能都不在直线上，同时严重偏离直线的点是错误数据，不具备研究意义，直接剔除。

4.描点连线规则

（1）图像为直线时，数据点均匀分布直线两侧。

（2）图像非直线时，一般用平滑曲线连接，千万不可以用折线进行连接。

（3）某些情况下需要选取合适的自变量实现“化曲为直”减小误差。

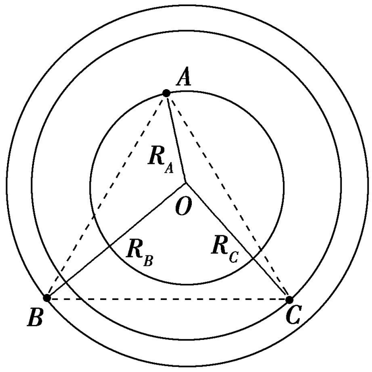
5.实验题中选点求斜率规则：

（1）不选通过实验数据描的点，直接在表格中找数据是错误的，否则作图无意义。

（2）选择恰好在十字交叉处的数据点。

（3）尽量选择相距比较远的数据点，避免斜率误差太大。

例 5.由三颗星体构成的系统，忽略其它星体对它们的作用，存在着一种运动形式：三颗星体在相互之间的万有引力作用下，分别位于等边三角形的三个顶点上，绕某一共同的圆心 O 在三角形所在的平面内做相同角速度的圆周运动(图示为 A、B、C 三颗星体质量不相同时的一般情况)。若 A 星体质量为 $2m$、B、C 两星体的质量均为 m，三角形的边长为 a，求：



(1)A 星体所受合力大小 F_A；

(2)B 星体所受合力大小 F_B；

(3)C 星体的轨道半径 R_C；

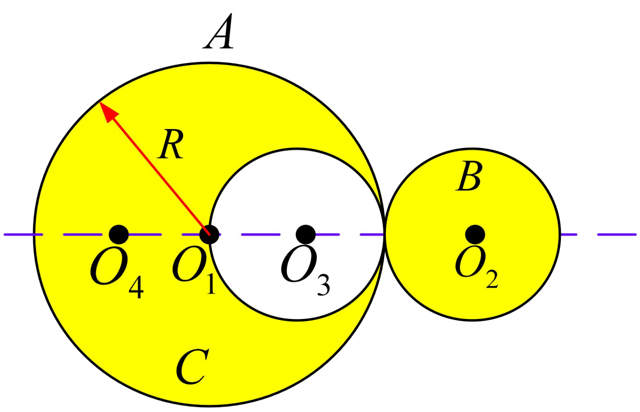
(4)三星体做圆周运动的周期 T。

答案： (1)$2\sqrt{3}\dfrac{Gm^2}{a^2}$ (2)$\sqrt{7}\dfrac{Gm^2}{a^2}$ (3)$\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$ (4)$\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{Gm}}$

F.平方反比中的“质心”

因为任一个天体所处引力场为非匀强场，同时万有引力与位矢为平方反比关系，多星系统中某个天体的向心力一般只能分别用万有引力定律计算相互作用万有引力后，用平行四边形定则求解，在此提出平方反比关系中的质心公式。

通过一道例题来说明“等效法”求万有引力的误区。如图所示，在一个半径为 R，质量为 M 的均匀球体 A 中挖去一个半径为 $0.5R$ 的球体 B，放置于球体 A 外侧并相切。试求 A 球体剩余部分对球体 B 的万有引力。



解法一：割补法

A球体剩余部分对球体B的万有引力可以等价为完整实心球A对B球的引力减去挖去部分对B球的万有引力。即：$F_{万}=G\dfrac{M\dfrac{M}{8}}{(\dfrac{3R}{2})}-G\dfrac{(\dfrac{M}{8})^2}{R^2}=\dfrac{23}{576}G\dfrac{M^2}{R^2}$

解法二：质心法

A球剩余部分对B球的引力等效为将剩余部分质量全部集中于其质心处的质点对B球的引力。根据质心坐标公式可知：$0=\dfrac{7}{8}r_c-\dfrac{1}{8}\bullet\dfrac{R}{2}$ 解得：$r_c=\dfrac{R}{14}$

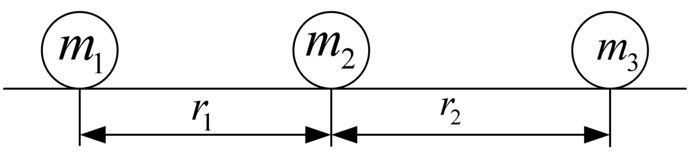
$$F_{万}=G\frac{\dfrac{7M}{8}\bullet\dfrac{1M}{8}}{(\dfrac{11}{7}R)^2}=\frac{343}{7744}G\frac{M^2}{R^2}$$

解法三：割补法+质心法

将剩余部分的左侧再分离出一个半径为$0.5R$的球体，则对球体B的引力可以等价为两部分质量对球体B的引力的矢量和。$F_{万}=G\dfrac{\dfrac{6M}{8}\bullet\dfrac{M}{8}}{(\dfrac{3R}{2})^2}+G\dfrac{\dfrac{M}{8}\bullet\dfrac{M}{8}}{(2R)^2}=\dfrac{35}{768}G\dfrac{M^2}{R^2}$

三种解法，看似各有道理，但是计算结果却各不相同，下面来探讨一下到底哪种做法正确以及错误做法的原因，通过一个简单的实例来说明一下。

如图质量分别m_1、m_2、m_3的三个小球，其相对位置如图所示，求m_3所受到的万有引力.



解：根据万有引力定律：$F_{万1}=G\dfrac{m_1m_3}{(r_1+r_2)^2}+G\dfrac{m_2m_3}{{r_2}^2}=\dfrac{Gm_1m_3{r_2}^2+Gm_2m_3(r_1+r_2)^2}{(r_1+r_2)^2{r_2}^2}$

若采用质心法：$F_{万2}=G\dfrac{(m_1+m_2)\ m_3}{(\dfrac{m_1r_1}{m_1+m_2}+r_2)^2}=G\dfrac{(m_1+m_2)^3m_3}{(m_1r_1+m_1r_2+m_2r_2)^2}$

很显然二者并不相等，说明质心法在此并不适用，所以前面例题中解法二和解法三是错误的，下面探讨一下错误的原因。

首先研究一下质心坐标公式：$r_c=\dfrac{m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3+m_4r_4+m_5r_5+.....}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+......}$

质心位置可以看做各质点位置坐标关于质量的线性加权平均值，而万有引力是平方反比规律，所以用各质点位置坐标关于质量的线性加权平均值来代替该情境下的等效质心位置必然不合适。

根据质心公式推测万有引力等平方反比规律所对应的“平方反比规律质心公式”

$$\frac{1}{r_c^2}=\frac{m_1\frac{1}{r_1^2}+m_2\frac{1}{r_2^2}+m_3\frac{1}{r_3^2}+m_4\frac{1}{r_4^2}+m_5\frac{1}{r_5^2}+.....}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+......}=\frac{\sum m_i\frac{1}{r_i^2}}{\sum m_i}$$

其中r_c为“等效质心”到受力质点的距离。

下面开始验证：平方反比规律质心公式可以变形为：

$$(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+.....)\frac{1}{r_c^2}=m_1\frac{1}{r_1^2}+m_2\frac{1}{r_2^2}+m_3\frac{1}{r_3^2}+m_4\frac{1}{r_4^2}+m_5\frac{1}{r_5^2}+....$$

等式两侧同时乘以代数式Gm_0可得等式：

$$\frac{Gm_0(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+.....)}{r_c^2}=\frac{Gm_0m_1}{r_1^2}+\frac{Gm_0m_2}{r_2^2}+\frac{Gm_0m_3}{r_3^2}+\frac{Gm_0m_4}{r_4^2}+\frac{Gm_0m_5}{r_5^2}+....$$

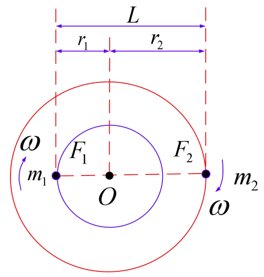
等式右侧即为各质点对m_0的引力，可知平方反比规律质心公式是正确的。

需要注意只是在球体情况，具有各个方向的对称性，其平方反比质心与线性质心出现了重合的情况，故在解决万有引力的问题时，需要尽量避开质心的做法。

补充：折合质量

对于相互作用的两个物体，若所受合外力为零，可以选择其中一个物体作为参考系（假定不动），由于不再是惯性系，则另外一个物体的等效质量$m'=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$，称之为折合质量或约化质量，或满足$\dfrac{1}{m'}=\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}$。如果相互作用力为恒力，则可以引入相对加速度$a'$，且有$a'=\dfrac{F}{m'}$。

1.双星问题



相关数据如图，试求双星周期。

解：万有引力提供向心力：

$$\frac{Gm_1m_2}{L^2}=m_1\omega^2r_1 \qquad \frac{Gm_1m_2}{L^2}=m_2\omega^2r_2 \quad \text{其中 } r_1+r_2=L$$

解得：$r_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}L$　$r_2=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}L$　$\omega=\sqrt{\dfrac{G(m_1+m_2)}{r^3}}$　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G(m_1+m_2)}}$

补充：$r_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}L$代入方程$\dfrac{Gm_1m_2}{L^2}=m_1\omega^2r_1$

可得：$\dfrac{Gm_1m_2}{L^2}=m_1\omega^2\dfrac{m_2}{m_1+m_2}L=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\omega^2L$

若令$m_1'=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$则$\dfrac{Gm_1m_2}{L^2}=m_1'\omega^2L$恰为一个星体绕另外一个静止的星体动力学方程。

注意：万有引力中的质量保持不变。

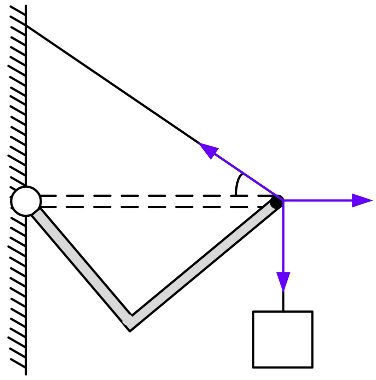
若以m_2为参考系，观察m_1的运动，需要引入惯性力。

参考系加速度：$a=\dfrac{Gm_1m_2}{r^2m_2}=\dfrac{Gm_1}{r^2}$

对m_1分析：$m_1\omega^2L=\dfrac{Gm_1m_2}{L^2}+\dfrac{Gm_1m_1}{L^2}=\dfrac{Gm_1m_2}{L^2}(1+\dfrac{m_1}{m_2})$ 整理可得：$\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\omega^2L=\dfrac{Gm_1m_2}{L^2}$

注意：可以理解为：通过改变质量抵消了由于相对运动而导致的运转半径的变化。

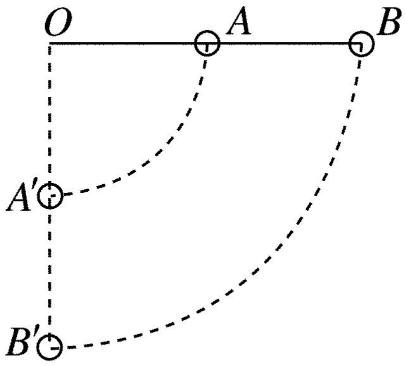
例 10.如图所示，对弯杆进行受力分析。



通过分析可知，可旋转的轻杆弹力不定沿杆方向。

“活杆”实际叫做二力杆，弹力方向沿着杆的端点连线方向，并不一定沿杆，只是在直杆情况下，杆与连线重合，才出现力沿杆方向的情况。

例 11.如图所示，长为 L 的轻杆，一端装有固定光滑的转动轴 O，另一端及中点固定着质量相同的 A 球和 B 球．将轻杆从水平位置由静止释放，当轻杆摆至竖直位置时，A、B 两球的速度大小各是多少?

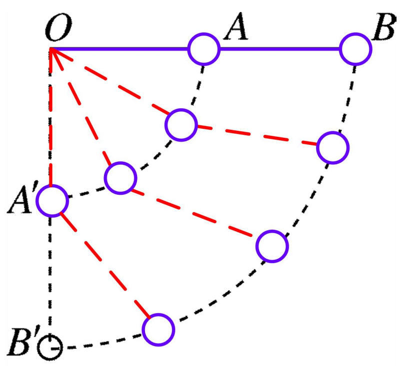


解:对 A、B 及杆整体受力分析可知，除重力外、还有轴对系统的支持力，支持力不做功、只有重力做功，因此 A、B 组成系统的机械能守恒．令轴正下方 L 处为零势面，选 A、B 处于水平状态为初态，B 至最低点为末态．则有 $2mgL=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}mv_A^2+mg\frac{L}{2}$ 由圆周运动知识，可知 $v_B=2v_A$，联立可得 $v_A=\sqrt{\frac{3gL}{5}}$，$v_B=\sqrt{\frac{12gL}{5}}$．

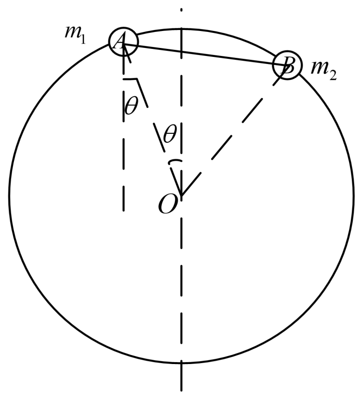
补充:若无 A 球，B 球摆至最低点速度 $v_B'=\sqrt{2gL}<\sqrt{\frac{12gL}{5}}$ 可见轻杆对小球 B 做了正功。按照“活杆”性质，力沿轻杆方向，始终与速度垂直，不做功，出现了矛盾。

解释 1：类比到单摆情况，A 球对应摆长小，则周期短，下摆快，而 B 球实际是在杆的拖拉作用下才与 A 球实现同步摆动。所以此时杆的力并不沿杆。

解释 2：“活杆”或者“二力杆”均为轻杆，无质量，则无惯性，所以才能与质点无限制的保持同步。此题 A 球实际等效为了杆的质量，导致轻杆条件不再成立。若杆足够柔软则会发现下摆时，发生弯折。



例 7．质量分别为 m_1、m_2 的两个金属圆环，套在一个半径为 R 的竖直放置的光滑圆环上，两环之间有一长为 R 的细线相连，若在如图所示的位置，系统恰好处于平衡状态，则半径 OA 与竖直方向的夹角关系正确的是（　　）

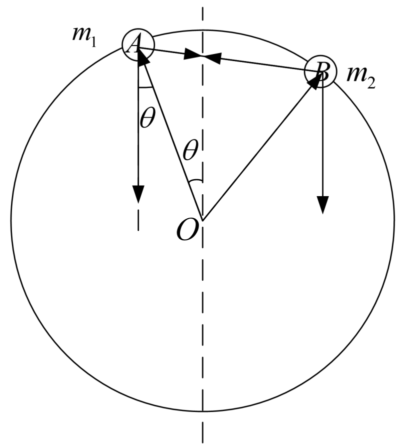


A．$\cot\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$

B．$\tan\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$

C．$\sin\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$

D．$\cos\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$



解法 1．正弦定理

对 m_1 分析：$\dfrac{m_1 g}{\sin 60^0}=\dfrac{F}{\sin\theta}$

对 m_2 分析：$\dfrac{m_2 g}{\sin 60^0}=\dfrac{F}{\sin(60^0-\theta)}$

联立可得：$\cot\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$

解法 2．力矩平衡

以点 O 为转轴，质点系统力矩平衡：$m_1 g\sin\theta=m_2 g\sin(60^0-\theta)$

化简即得：$\cot\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$

解法 3．重心法

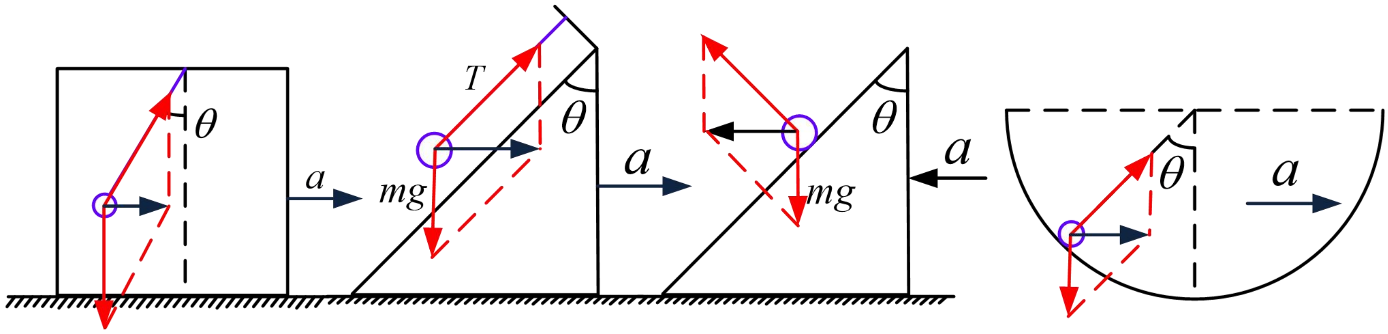
整体为研究对象，整体受重力和圆弧的支持力，重心必在圆心正上方。

则：$m_1 R\sin\theta=m_2 R\sin(60-\theta)$

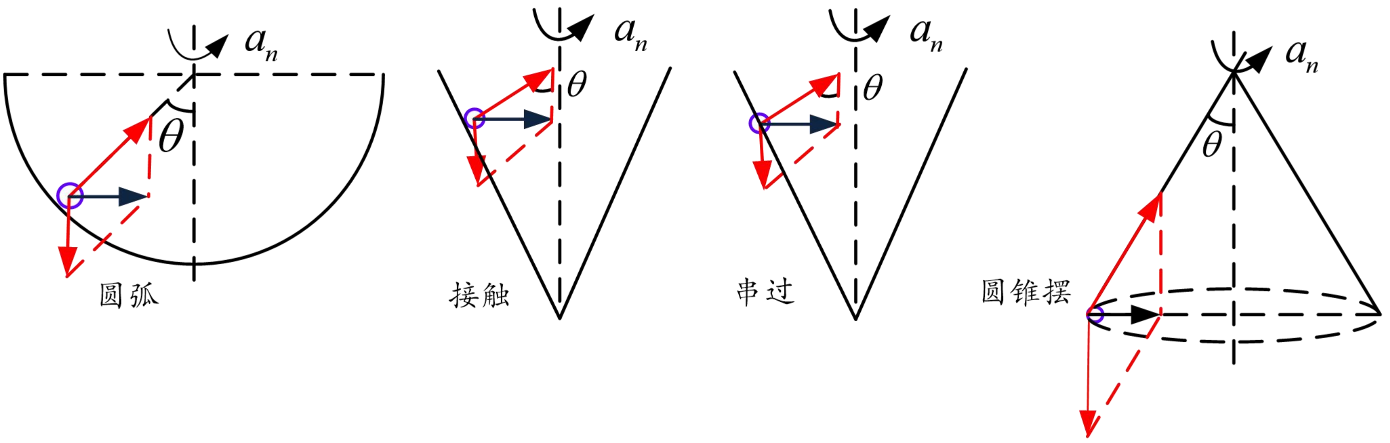
化简即得：$\cot\theta=\dfrac{2m_1+m_2}{\sqrt{3}m_2}$

3.32. $a=g\tan\theta$ 系列

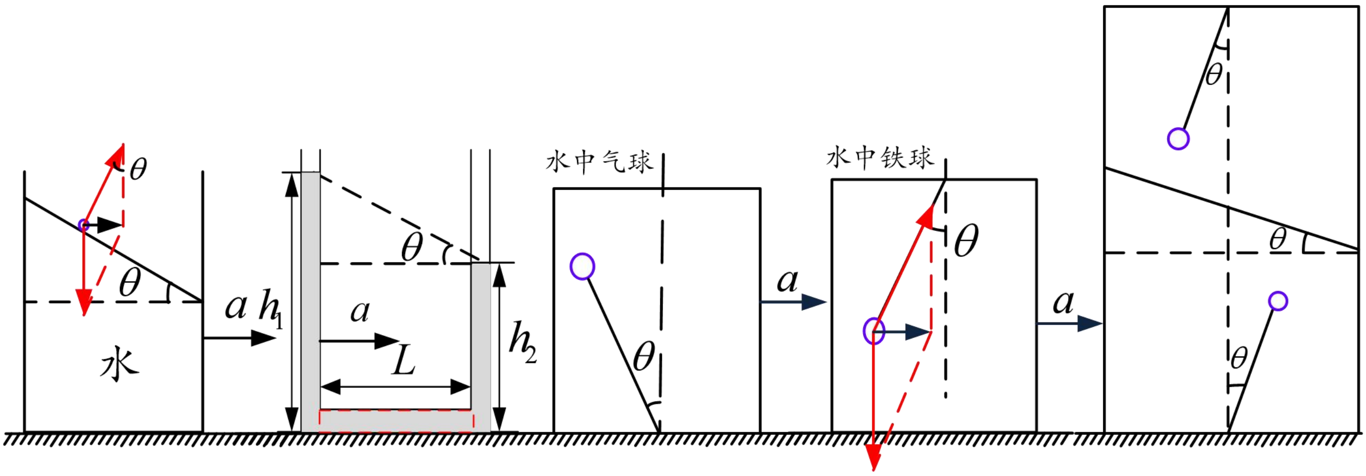
（1） $a=g\tan\theta$ 平动类型

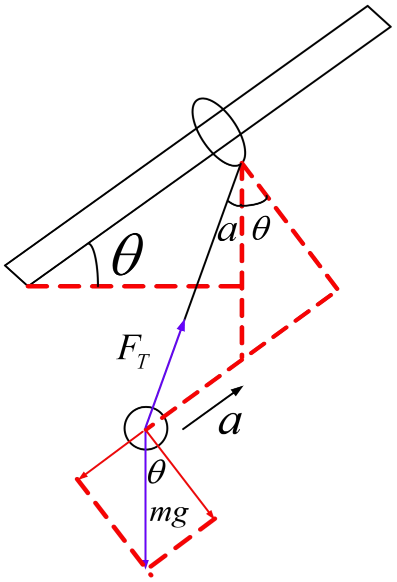


（2） $a=g\tan\theta$ 转动类型



（3） $a=g\tan\theta$ 加速液体类型





系统自由减速下滑。

整体：μ $(M+m)$ $g\cos\theta$- $(M+m)$ $g\sin\theta$+= $(M+m)$ a

$$a = g(\mu\cos\theta - \sin\theta)$$

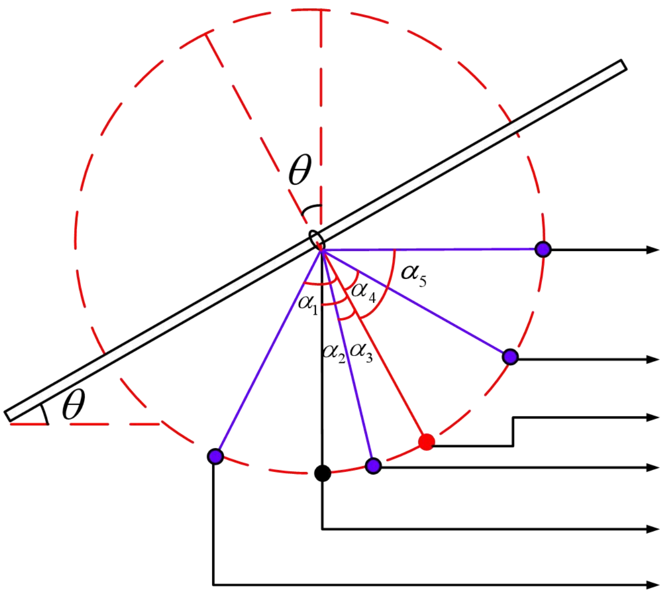
对 m ：$F_T\cos(\alpha+\theta) = mg\cos\theta$

$$F_T\sin(\alpha+\theta) - mg\sin\theta = ma$$

解得：$a = g[\tan(\alpha+\theta)\cos\theta - \sin\theta]$

故：$\mu = \tan(\alpha+\theta)$

综合对比



$\mu = \tan\alpha_5$ 匀减速上滑 $a = g(\sin\theta + \tan\alpha_5\cos\theta)$

特殊点：$a = \dfrac{g}{\sin\theta}$

$\mu = \tan\alpha_4$ 匀减速上滑 $a = g(\sin\theta + \tan\alpha_4\cos\theta)$

$\mu = 0$ 匀加速下滑 $a = g\sin\theta$

$\mu = \tan\alpha_3$ 匀加速下滑 $a = g(\sin\theta - \tan\alpha_3\cos\theta)$

$\mu = \tan\alpha_2$ 匀速下滑 $a = 0$

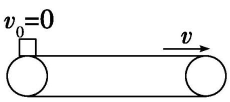
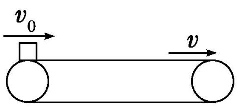
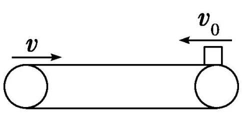
$\mu = \tan\alpha_1$ 匀减速下滑 $a = g(\tan\alpha_1\cos\theta - \sin\theta)$

附录 3 传送带微专题

一、动力学角度

物体在传送带上运动的情形统称为传送带模型。因物体与传送带间的动摩擦因数、斜面倾角、传送带速度、传送方向、滑块初速度的大小和方向的不同，传送带问题往往存在多种可能，因此对传送带问题做出准确的动力学过程分析，是解决此类问题的关键。

1. 水平传送带模型

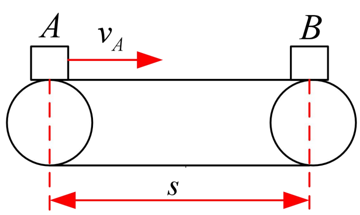
项目	图示	滑块可能的运动情况
情景 1		(1)可能一直加速 (2)可能先加速后匀速
情景 2		(1)$v_0>v$ 时，可能一直减速，也可能先减速再匀速 (2)$v_0<v$ 时，可能一直加速，也可能先加速再匀速
情景 3		(1)传送带较短时，滑块一直减速达到左端 (2)传送带较长时，滑块还要被传送带传回右端。若 $v_0>v$，返回时速度为 v，若 $v_0<v$，返回时速度为 v_0

例 1. 如图所示，水平传送带 A、B 两端相距 $x=3.5m$，工件与传送带间的动摩擦因数 $\mu=0.1$，工件滑上 A 端时的瞬时速 $v_A=4m/s$，到达 B 端的瞬时速度为 v_B。

（1）若传送带不动，v_B 多大?

（2）若传送带以速度 v 逆时针匀速转动，v_B 多大?

（3）若传送带以速度 v 顺时针匀速转动，v_B 多大?



解：（1）若传送带不动，工件滑上传送带以后受到向左的摩擦力作用，工件向右做匀减速运动，初速度为 v_A，加速度 $a=\mu g$，到达 B 处速度 $v_B=\sqrt{v_A^2-2as}=3m/s$，由 A 到 B 所用时间为 1s

（2）传送带逆时针转动时，工件受到的摩擦力大小和方向都未发生改变，所以物体的加速度也不会发生改变，物体运动到 B 端速度仍为 3m/s

（3）传送带顺时针转动时，情况复杂，根据传送带速度的大小有以下几种情况：

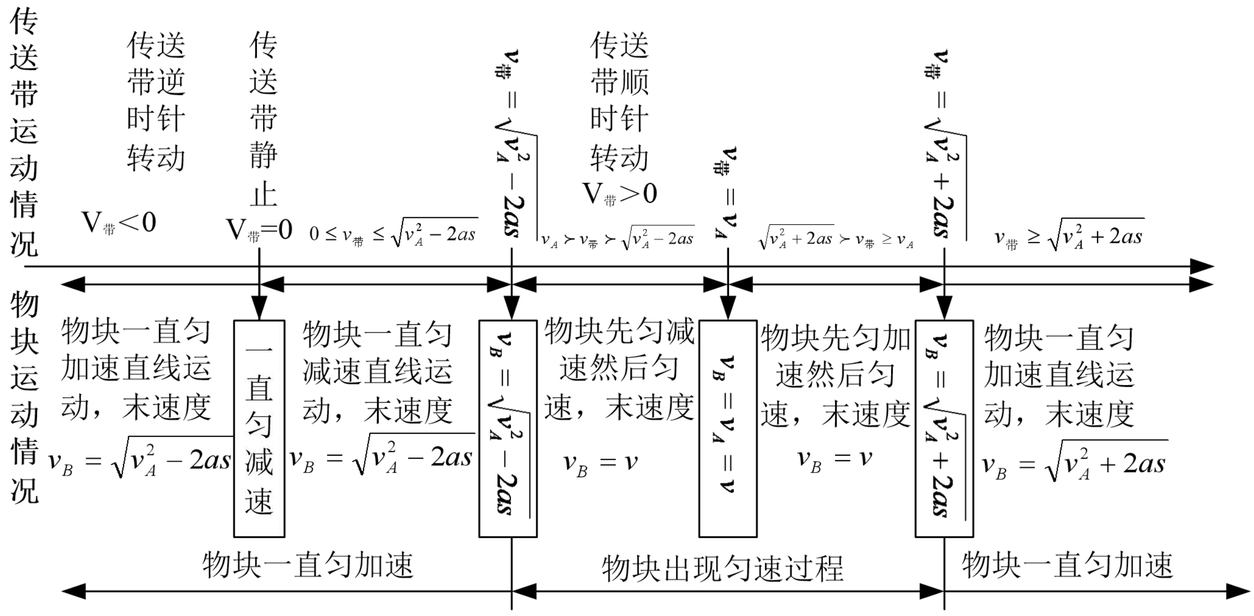
1.若 $v=v_A$ 时，工件滑上传送带时，两者速度相同，相对静止，均做匀速运动，工件到达 B 端时速度 $v_B=v_A=v$

2.若 $v\geq\sqrt{v_A^2+2as}$，工件由 A 到 B，全程做匀加速运动，到达 B 端时，$v_B=\sqrt{v_A^2+2as}$

3.若 $\sqrt{v_A^2+2as}>v\geq v_A$，工件由 A 到 B，先做匀加速运动，再做匀速运动，到达 B 端时，$v_B=v$

4.若 $v\leq\sqrt{v_A^2-2as}$，工件由 A 到 B，全程做匀减速运动，到达 B 端时，$v_B=\sqrt{v_A^2-2as}$

5.若 $v_A>v>\sqrt{v_A^2-2as}$，工件由 A 到 B，先做匀减速运动，再做匀速运动，到达 B 端时，$v_B=v$



试画出传送带速度与物体到达 B 端速度的函数关系图。